quindi

$$U'du + 7'dv = —f(n)dt = — dt_{19}$$

e la costruzione della superficie ortogonale ai raggi rifratti si otterrà dalla forinola

dove *n* dovrà esprimersi in funzione di *t,* o *i* di *n.*

VI.

Consideriamo le rette del sistema primitivo come invariabilmente connesse colla superficie iniziale (scelta ad arbitrio). Non farà difficoltà concepire questa connessione quando si supponga che la retta uscente da un punto dato debba formare angoli dati (variabili da punto a punto secondo leggi determinate) colle tangenti a due curve arbitrarie tracciate per quel punto sulla superficie, per es. alle due curve dei sistemi *u* = cost., *v* = cost. che passano per il punto considerato. Nulla impedisce allora di supporre che la superficie, considerata come flessibile ed inestendibile, assuma una qualunque delle infinite forme conciliabili colla sua natura, trasportando con sé tutte le rette del sistema: a ciascuna di queste forme corrisponderà evidentemente una disposizione pienamente determinata di quelle rette.

Sieno a(w, f), ji(w, t') gli angoli che la retta (X, 7, Z) fa colle curve ^ = cost., *u* = cost. nel punto *(u,* i/), in cui essa incontra la superficie iniziale. In virtù dei valori (7) si ha

U= l/£.cosa, *V* = 1/G. cos p ,

e quindi la condizione dell'esistenza di una superficie ortogonale diventa

d(t/£. cosa)
a(|/G. cosp)
d v *d n*

Ora le quantità *E, G* rimangono inalterate nelle varie flessioni della superficie; gli angoli a e *$* rimangono anch'essi, per ipotesi, formati sempre nello stesso modo con *n e v i* dunque se l'equazione precedente o soddisfatta quando la superficie ha una certa forma, essa non cessa d'esserlo in tutte le possibili trasformazioni della superficie stessa.

Abbiamo dunque il seguente teorema :

Se le rette componenti un sistema sono normali ad una superficie, e se queste rette si considerano come invariabilmente connesse ad una superficie arbitraria (nei punti in cui esse la incontrano), *in ogni flessione di questa superficie esse si manterranno sempre normali ad una*

superficie.